

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ

(1)

www.math.uoi.gr/~abatsidis/532.html

• Ασκήσεις από ένα pdf

• Ηλεκτρονικό καθημέρο

• Σημειώσεις

Γραφείο: 303γ

Ευδοτος - 4 βιβλία

Βασίλειος

Κεκάουλος

abatsidis@uoi.gr

26510 08932

Ιστορικά

Οι στοχαστικές διαδικασίες οφείλουν την ονομασία τους σε έναν φυσικό που περιέγραψε την ~~α~~ κίνηση ενός σφαιριδίου όταν βρισκόταν σε υγρό ή αέριο, ο Brown το 1827.

Einstein (1905)

Wiener (1923)

Ορισμός

Οι στοχαστικές διαδικασίες ασχολούνται με την μελέτη-ανάλυση χώρων (στοχαστικών) τυχαίων.

Τυχαίο φαινόμενο λέγεται το φαινόμενο του οποίου η έκβαση είναι αβέβαιη (ένα απ' τα δυνατά).

Δυναμική είναι το φαινόμενο το οποίο επεί. στο "χρόνο"

Ορισμός

Μια στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) είναι μια οικογένεια χώρων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, \mathcal{F}, P)

δηλ. $\{X(t), t \in T\}$

Ω : Δειγματικός χώρος

\mathcal{F} : σ -άλγεβρα: μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του Ω με τις ιδιότητες:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega - A \in \mathcal{F}$

3) A_1, \dots, A_n για $n \in \mathbb{N}$. ή ανήγη ακολουθία συνόλου του \mathcal{F}
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

P : μέτρο πιθανότητας ή απλή συνάρτηση $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2)

Περαιτέρω

σ.δ. σε συνεχή χρόνο

Η παράμετρος t μεταβάλλεται είτε σε διάστημα η.χ. $t \in [0, \infty)$
είτε λαμβάνει διακεκριμένες τιμές \rightarrow σ.δ. σε διακριτό χρόνο.

Ορισμός

S : Χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της стоχαστικής διαδικασίας.

- 1) με συνεχή χώρο καταστάσεων
- 2) με διακριτό χώρο καταστάσεων

Πρόβλημα ανέλιξης πληθυσμών

Έστω $X(t)$: ο αριθμός των μελών ενός συγκεκριμένου πληθυσμού

$$\{X(t) : 0 \leq t < +\infty\}$$

$$X(t) = X(0) + \Gamma(t) - \Pi(t)$$

αρχ. μέγεθος όσο γεννήματα όσο θάνατα

$$\text{ή} \quad X(t) = \max\{0, X(0) + \Gamma(t) - \Pi(t)\}$$

Πρόβλημα Οικολογικής Ανταγρέσεως

Έστω A & B : 2 πληθυσμοί έχοντες, γονε $\{r_i\}$ σε κάποιο συγκεκριμένο περιβάλλον

Αν μέλος του A αναπαράγει μέλος του B τότε με πιθανότητα p τον "σκοτώνει" & με πιθανότητα q "σκοτώνεται"

Έστω X_n η стоχαστική διαδικασία που περιγράφει τον αριθμό των μελών του πληθ. A μετά το χρόνο της n γενιάς

$$X_{n+1} = X_n + \Gamma_n - \Pi_n + Z_n \quad \text{όπου } Z_n = \begin{cases} 0 & \text{όταν κερδίσει } > A \\ -1 & \text{όταν χάσει } < A \end{cases}$$

$$P(Z_n = 0) = p \quad \text{και} \quad P(Z_n = -1) = q$$

Πρόβλητε Ελέγχου αποθεμάτων

Έστω X_n : ο αριθμός των "αποθηκευμένων" προϊόντων στο τέλος του n -οστού μήνα

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - ZHT_n + MΠ_n & \text{αν } X_n \geq ZHT_n - MΠ_n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ZHT_n : ζήτηση τον μήνα n

$MΠ_n$: πώληση τον μήνα n

Σταξινόηση των σ.δ. ως προς τις σχέσεις εξάρτησης των ζ.τ. που αποτελούν σ.δ.

Ορισμός (Μαρκοβιανή ιδιότητα)

Μια σ.δ. ονομάζεται Μαρκοβιανή διαδικασία αν δοθείσης της κατάστασης της τη χρονική στιγμή t (ΠΑΡΟΝ) η κατάσταση της τη χρονική στιγμή $s > t$ (ΜΕΛΛΟΝ) δεν εξαρτάται από τις χρον. στιγμές $u < t$ (ΠΑΡΕΛΘΟΝ)

$$P(\alpha < X_{t_k} < \beta \mid X_{t_1} = w_1, X_{t_2} = w_2, \dots, X_{t_{k-1}} = w_{k-1}) = P(\alpha < X_{t_k} < \beta \mid X_{t_{k-1}} = w_{k-1})$$

Θεώρημα

Μια σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο και έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα τότε αυτή ονομάζεται μαρκοβιανή αλυσίδα

Τυχαίος περπάτημα

Έστω ένα πρόβλημα του κινώμενου κατά μήκος του άξονα των πραγματικών. Έστω X_0 η θέση του τη χρον. στιγμή 0

$X_1 = X_0 + Z_1$ η Z_1 η ζ.τ. που αντιστοιχεί στην μετατόπιση

$$X_2 = X_1 + Z_2$$

⋮

$$X_n = X_{n-1} + Z_n = X_0 + Z_1 + \dots + Z_n$$

Ένας περπάτημα για τον οποίο ισχύει ότι οι Z_1, Z_2, \dots, Z_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες χ.τ. $P(Z_i = X) = \begin{cases} 1-p-q & X=0 \\ q & X=-1 \\ p & X=1 \end{cases}$
λέγεται ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΠΑΤΟΣ

(4)

Αυτός ο νέπιντας λέγεται αυτός χωρίς νέπιντας είναι αυτός δηλ. να υποδείξω ότι το σκεπτικό LE πιθανότητα p κάνει ένα βήμα δεξιά, LE πιθανότητα q κάνει ένα βήμα ίσων μήκους αριστερά και LE πιθανότητα $1-p-q$ παραμένει στην θέση του - αναηδία

παιχτός

Ελεύθερος χωρίς νέπιντας λέγεται εκείνος όταν η κίνηση του σκεπτικού δεν επηρεάζει κατέ κέρδιο ζήτη, δηλ. μπορεί να καταλάβει οποιδήποτε θέση πάνω στον άξονα των πρ. αριθμών

Πότε ένας χωρίς νέπιντας έχει φρέζα αποδόσεων;

Αν

Έχω στην τσέπη μου 5€

Οε παίξω έως ότου το κέρδος μου γίνει 10€ ή

χέσω όλο το ποσό

Χη: το κέρδος μου τη n -οστή χρησιμότητα

$$-5 \quad \xrightarrow{x=0} \quad 10$$

Εδώ έχω 2 φρέζα αποδόσεων το -5 και το 10

αποδοτός

Φρέζα ανάκλισης όσον το σκεπτικό φέρσει εκεί μπορεί πλέον να ξεφύγει μόνο προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ